Über eine zahlentheoretische Funktion von E. Jacobsthal

Kanold, Hans-Joachim

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 25, 1975, S.7-10

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Über eine zahlentheoretische Funktion von E. Jacobsthal [1])

Von **Hans-Joachim Kanold**, Braunschweig

Die zahlentheoretische Funktion g(n) von E. Jacobsthal kann definiert werden als „Maximalabstand zweier aufeinanderfolgender zu n teilerfremder natürlicher Zahlen".

Zuerst wurde g(n) systematisch untersucht von E. Jacobsthal, etwa ab 1960 in einer Reihe von Arbeiten [3].

1962 schrieb P. Erdös eine Abhandlung über g(n) [1]. Von 1963 an wurde g(n) in Braunschweig untersucht von H. Harborth und mir [2], [4].

Über einige Ergebnisse und Probleme, die im Zusammenhang mit g(n) stehen, soll nun kurz berichtet werden. Man sieht leicht ein, daß man sich auf quadratfreie $n = p_1 p_2 \ldots p_k$ $(p_1 < p_2 < \ldots < p_k$, Primzahlen) beschränken darf. Ein Hauptresultat von E. Jacobsthal ist

$$(1) \quad k+1 \leqq \left[\frac{kp_1-1}{p_1-1}\right] + 1 \leqq g(p_1 \ldots p_k) \leqq (k+1)\,2^k - k.$$

Hierbei bedeutet die eckige Klammer ein bekanntes zahlentheoretisches Symbol: Für eine reelle Zahl x ist [x] die größte ganze Zahl, welche x nicht übertrifft. Man beachte, daß die obere Schranke in (1) allein von k abhängt.

P. Erdös zeigte: Für „fast alle n" gilt

$$(2) \quad g(n) = \frac{n}{\Phi(n)}\,k + o\,(\log\log\log n) < (1+\varepsilon)\,e^C k \log k.$$

Der Ausdruck „fast alle n" besagt, daß die Abschätzung (2) für alle n gilt bis auf eine Ausnahmemenge, welche die Dichte Null besitzt; man kann auch etwas ungenau so sagen: Die Wahrscheinlichkeit, mit der man eine Zahl der Ausnahmemenge aus der Menge aller natürlichen Zahlen zieht, ist gleich Null.

Die Funktion $\Phi(n)$ ist die bekannte Eulersche Funktion, die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen in der Menge

$\{1, 2 \ldots, n\}$; $o(\log\log\log n)$ besagt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{o\,(\log\log\log n)}{\log\log\log n} = O.$

Mit ε bezeichnen wir eine beliebig kleine, feste positive reelle Zahl und $C = 0{,}577\ldots$ ist die Euler-Mascheronische Konstante. H. Harborth bewies 1965 in seiner Dissertation:

Sei $n = p_1 \ldots p_k$ das Produkt der ersten k ungeraden, der Größe nach geordneten Primzahlen und $x \geqq 1$ eine reelle Zahl. Dann gilt

$$(3) \quad \frac{2x}{x+1}\,p_k < g(n) \text{ für alle } p_k \geqq e^{6(x+1)}.$$

[1]) Diese Note ist ein etwas umgearbeiteter Vortrag, welcher am 28. 4. 1972 vor der BWG gehalten wurde.

(4) Für alle $p_k \geqq 71$ gilt $g(p_1 \dots p_k) > p_k > k \log k$.

Bei beliebig vorgegebenem $\varepsilon > O$ läßt sich immer eine Primzahl $p_{k(\varepsilon)}$ so finden, daß daß für alle $p_k \geqq p_{k(\varepsilon)}$ gilt

(5) $(2\text{-}\varepsilon)\, p_k < g(p_1 \dots p_k)$.

Daß g(n) auch interessant für andere zahlentheoretische Fragen sein kann, zeigen die folgenden beiden Sätze.

Satz 1. Aus $g\Big(\prod\limits_{\substack{p<d\\ p\nmid d}} p\Big) < d$ folgt, daß

$\mathfrak{a} = \{a+d,\ a+2d,\ \dots,\ a+(d-1)d\}$ mit $1 \leqq a < d$, $(a,d) = 1$ mindestens eine Primzahl enthält.

Satz 2. Es seien $p_1, p_2, \dots$ die der Größe nach geordneten ungeraden Primzahlen. Es seien a, d zwei natürliche Zahlen, welche $(a,d) = 1$ und $1 \leqq a < d$ erfüllen. Wenn es eine positive Konstante c_1 gibt, so daß $g(p_1 \dots p_k) < p_k^{2-c_1}$ für $k = 1, 2, 3 \dots$ gilt, dann folgen auch die beiden Sätze von Linnik und Dirichlet:

(a) (Linnik): Unter den Zahlen $a+d, a+2d, \dots$ befindet sich eine Primzahl $p = a+vd < d^{c_2}$ (c_2 = konstant).

(b) (Dirichlet): Die Folge $a+d, a+2d, \dots$ besitzt unendlich viele Primzahlen.

Wir können $c_2 = \dfrac{7}{3c_1}$ annehmen, bei geradem d sogar $c_2 = \dfrac{2}{c_1}$.

Jetzt sollen einige weitere neue Ergebnisse über g(n) zitiert und die Beweise skizziert werden.

Satz 3. Es sei l eine natürliche Zahl; $p_1, \dots, p_k$ seien Primzahlen. Ferner gelte $l \leqq p_1 < \dots < p_{l-1} < k \leqq p_l < \dots < p_k$.
Dann ergibt sich:
Aus $l = 1$, $p_1 > k$ folgt $g(p_1 \dots p_k) = k+1$;
aus $l = 1$, $p_1 = k$ folgt $g(p_1 \dots p_k) = k+2$;
aus $2 \leqq l \leqq 7$ folgt $g(p_1 \dots p_k) \leqq lk+1$;
aus $8 \leqq l$ und $\left(3 + \dfrac{5}{l-3}\right) \log l \leqq \log k$ folgt $g(p_1 \dots p_k) \leqq lk+1$.

Skizze des Beweises. Für $l = 1$ sind die Ergebnisse bekannt. Für $l > 1$ wird der Beweis indirekt geführt. Wir nehmen an, es existiere eine natürliche Zahl a, so daß kein Element von

(6) $\mathfrak{a} = \{a+1, \dots, a+lk+1\}$

zu $p_1 \dots p_k$ teilerfremd ist. Wir untersuchen nun, wieviele Elemente von $\mathfrak{a}$ höchstens durch p_1 bzw. durch $p_\varkappa$ (und nicht durch p_1 für $\varkappa > 1$) teilbar sein können. Daraus ergibt sich die Bedingung

$$(7)\quad (k+1)(l-1) \leqq \sum_{\varkappa=1}^{l-1} \left[\frac{lk}{p_\varkappa}\right] + \sum_{j=2}^{l-1} \left(\pi\left(\frac{lk}{j}\right) - \pi(k)\right),$$

aus deren Diskussion die Ergebnisse folgen. Für die Untersuchungen bei großen l ist nützlich der folgende, einfach zu beweisende

Hilfssatz. Es seien a, b natürliche Zahlen, c sei eine reelle Konstante. Ferner gelte $a \leqq b < c \cdot e^{-1,5} - 0,5$. Dann folgt

$$(8)\quad \sum_{j=a}^{b} \pi\left(\frac{c}{j}\right) < c \log\left(1 + \frac{\log \frac{2b+1}{2a-1}}{\log \frac{2ce^{-1,5}}{2b+1}}\right).$$

Beim Beweise benutzt man Ergebnisse von Rosser-Schoenfeld [5], welche besagen: Für $x \geqq 67$ gilt

$$(9)\quad \frac{x}{\log x - 0,5} < \pi(x) < \frac{x}{\log x - 1,5}.$$

Eine leichte Folgerung aus den vorangehenden Ergebnissen ist:

(10) Aus $(p_1 \ldots p_k, 6) = 1$; $k \leqq 17$ folgt $g(p_1 \ldots p_k) \leqq 2k\sqrt{k}$.

Ferner lassen sich durch elementare Überlegungen auch die weiteren Resultate ableiten:

(11) Aus $1 < k \leqq 12$ folgt $g(p_1 \ldots p_k) \leqq k^2$.

(12) Aus $1 < k^{0,6} \leqq p_1 < \ldots < p_k$ folgt $g(p_1 \ldots p_k) \leqq k^{1,2}$.

(13) Aus $k \geqq e^{50}$; $k^{0,48} \leqq p_1 < \ldots < p_k$ folgt $g(p_1 \ldots p_k) \leqq k^2$.

(14) Wenn $\sqrt{k} \leqq p_1 < \ldots < p_k$; $g(p_1 \ldots p_k) > 5k$ gelten sollen, muß $16 < k < e^{21}$ erfüllt sein.

Nützlich für die Untersuchungen sind auch die beiden folgenden, z.T. bekannten, Aussagen.

(15) Aus $(2, n) = 1$ folgt $g(2n) = 2g(n)$.

(16) Es seien m, n zwei teilerfremde natürliche Zahlen. Dann ist $g(m \cdot n) \leqq \min\{m\,g(n) + g(m) - m;\ n\,g(m) + g(n) - n\}$.

Die wohl schärfsten bisher veröffentlichten Abschätzungen von g (n) nach oben sind

(17) $g(p_1 \ldots p_k) \leqq 2^k$.

(18) $g(p_1 \ldots p_k) \leqq 2^{\sqrt{k}}$ für $k \geqq e^{50}$.

Diese Schranken sind zwar besser als die in (1) angegebenen. Jedoch sind sie für große k noch weit von den vermuteten entfernt. Eine Verbesserung der Aussage (16) würde in bezug auf die oberen Schranken wesentlich weiterführen. Die unteren Schranken [vgl. (4) und (5)] scheinen nicht mehr wesentlich heraufzusetzen sein. Zum Schluß sei es gestattet, noch eine Vermutung auszusprechen.

(V) Stets gilt $g(p_1 \ldots p_k) \leqq 2k\sqrt{k}$.

Für kleine k ist die Vermutung sicher richtig [vgl. auch (10)]. Aus V würde sich eine Verschärfung des bedeutenden Satzes von Linnik (vgl. Satz 2) ergeben: Unter den Zahlen $a+d$, $a+2d$, ... mit $(a,d)=1$ befindet sich eine Primzahl $p=a+\nu\, d < d^5$.

Es sei noch erwähnt, daß manche der in dieser Note angegebenen Ergebnisse durch genauere und umfangreichere Rechnungen und Abschätzungen (evtl. mit Computer) verschärft werden können. Eine wirkliche Prüfung der Richtigkeit von (V) ist aber damit nicht zu erwarten.

Literatur

[1] *Erdös, P.:* On the integers relatively prim to n and a numbertheoretic function considered by Jacobsthal. Math. Scand. *10*, 163–170 (1962).

[2] *Harborth, H.:* Eine untere Grenze für g(n). Diss. Braunschweig, 1965.

[3] *Jacobsthal, E.:* Über Sequenzen ganzer Zahlen, von denen keine zu n teilerfremd ist. I–III. Norske Vid. Selsk. Forhdl. *33*, 117–124, 125–131, 132–139 (1960).

[4] *Kanold, H.-J.:* Über Primzahlen in arithmetischen Folgen, I, II; Math. Ann. *156*, 393–395 (1964), *157*, 358–362 (1965).
Über eine zahlentheoretische Funktion von Jacobsthal. Math. Ann. *170*, 314–326 (1967).
Elementare Betrachtungen zur Primzahltheorie. Arch. Math. *14*, 147–151 (1963).

[5] *Rosser, J. – Schoenfeld, L.:* Approximate formulas for some functions of prime numbers. Illinois J. of Math. *6*, 64–94 (1962).